

MATEMATIKA IPA PAKET B
KUNCI JAWABAN SOAL

1. Jawaban : B

Misalkan p: air sungai jernih
q: Tidak terkandung zat pencemar
r: Semua ikan tidak mati

Diperoleh :

Premis 1 : $p \Rightarrow q$

Premis 2 : $\sim r \Rightarrow \sim q \equiv q \Rightarrow r$

Kesimpulan : $p \Rightarrow r$

Jadi, kesimpulan dari premis-premis tersebut adalah “Jika air sungai jernih maka semua ikan tidak mati”.

2. Jawaban : D

Misalkan : p: Semua sisi segitiga sama panjang
q: Semua sudut segitiga sama besar

pernyataan tersebut dapat ditulis “ $p \Rightarrow q$ ” $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

Jadi, pernyataan yang ekuivalen adalah “ada sisi segitiga yang tidak sama panjang atau semua sudut segitiga sama besar”.

3. Jawaban : E

$$\begin{aligned}\frac{(a^4 b^3)^2 c^{-3}}{(a^{-2} b^{-1} c^{-\frac{2}{3}})} &= \frac{a^8 b^6 c^{-3}}{a^6 b^3 c^2} = \frac{a^{8-6} b^{6-3}}{c^{2+3}} \\ &= \frac{a^2 b^3}{c^5} = \frac{2^2 3^3}{6^5} = \frac{2^2 \cdot 3^3}{(2 \cdot 3)^5} \\ &= \frac{2^2 \cdot 3^3}{2^5 3^5} = \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} = \frac{1}{72}\end{aligned}$$

4. Jawaban : C

$$\begin{aligned}\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} &= \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{9 \times 2 + 6\sqrt{6} + 3\sqrt{6} + 2 \times 3}{9 \times 2 - 4 \times 3} \\ &= \frac{18 + 9\sqrt{6} + 6}{18 - 12} \\ &= \frac{24 + 9\sqrt{6}}{6} \\ &= \frac{8 + 3\sqrt{6}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(8 + 3\sqrt{6})\end{aligned}$$

5. Jawaban : E

$$\begin{aligned} {}^6\log 75 &= \frac{{}^2\log 75}{{}^2\log 6} = \frac{{}^2\log(25 \times 3)}{{}^2\log(2 \times 3)} = \frac{{}^2\log 25 + {}^2\log 3}{{}^2\log 2 + {}^2\log 3} \\ &= \frac{{}^2\log 5^2 + a}{{}^2\log 2 + a} = \frac{2 \cdot {}^2\log 5 + a}{{}^2\log 2 + a} = \frac{2 \cdot \frac{1}{b} + a}{{}^2\log 2 + a} \\ &= \frac{2 + ab}{b} = \frac{2 + ab}{b(1 + a)} = \frac{2 + ab}{b + ab} \end{aligned}$$

6. Jawaban : B

Dari persamaan $x^2 - (m + 3)x + 3 = 0$ diperoleh:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = m + 3$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 3$$

$$x_1 \cdot x_2^2 - x_1x_2 = ((x_1 + x_2) - 2x_1x_2) - x_1x_2$$

$$\Leftrightarrow 3m + 4 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2$$

$$\Leftrightarrow 3m + 4 = (m + 3)^2 - 3 \times 3$$

$$\Leftrightarrow 3m + 4 = m^2 + 6m + 9 - 9$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m = 3m + 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 3m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)(m + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \text{ atau } m = -4$$

Jadi, nilai $m = -4$ atau $m = 1$.

7. Jawaban : C

Dari persamaan kuadrat $x^2 + (2p - 12)x + p = 0$ diperoleh :

$$a = 1, b = 2p - 12, c = p$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (2p - 12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p$$

$$= 4p^2 - 48p + 144 - 4p$$

$$= 4p^2 - 52p + 144$$

$$= 4(p^2 - 13p + 36)$$

$$= 4(p - 4)(p - 9)$$

Persamaan kuadrat menyinggung sumbu X jika $D = 0$.

$$4(p - 4)(p - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow p - 4 = 0 \text{ atau } p - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = 4 \text{ atau } p = 9$$

Jadi, nilai p yang memenuhi adalah $p = 4$ atau $p = 9$.

8. Jawaban : C

Misalkan x = Harga 1 kg manggis

y = harga 1 kg duku

z = harga 1 kg manga

Diperoleh sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$2x + 2y + 3z = 64.000 \quad \dots (1)$$

$$3x + y + z = 42.500 \quad \dots (2)$$

$$x + 2y + 2z = 47.500 \quad \dots (3)$$

Eliminasi y dari (1) dan (2).

$$\begin{array}{r|l} 2x + 2y + 3z = 64.000 & \times 1 \\ 3x + y + z = 42.500 & \times 2 \\ \hline & 6x + 2y + 2z = 85.000 \\ & -4x + z = 21.000 \quad \dots (4) \end{array}$$

Eliminasi y dari (1) dan (3).

$$\begin{array}{r} 2x + 2y + 3z = 64.000 \\ x + 2y + 2z = 47.500 \quad - \\ \hline x + z = 16.500 \quad \dots (5) \end{array}$$

Eliminasi z dari (4) dan (5).

$$\begin{array}{r} -4x + z = -21.000 \\ x + z = 16.500 \quad - \\ \hline -5x = -37.500 \\ \Leftrightarrow x = 7.500 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x = 7.500 &\Rightarrow x + z = 16.500 \\ &\Leftrightarrow 7.500 + z = 16.500 \\ &\Leftrightarrow z = 9.000 \\ &3x + y + z = 42.500 \\ \Leftrightarrow 3 \times 7.500 + y + 9.000 &= 42.500 \\ \Leftrightarrow 22.500 + y + 9.000 &= 42.500 \\ \Leftrightarrow y + 31.500 &= 42.500 \\ \Leftrightarrow y &= 11.000 \\ 3x + y + 4z &= 3 \times 7.500 + 11.000 + 4 \times 9.000 \\ &= 22.500 + 11.000 + 36.000 \\ &= 69.500 \end{aligned}$$

Jadi, Bu Esti harus membayar Rp. 69.500,00

9. Jawaban : B

Menentukan titik potong garis $x = -3$ dengan lingkaran $L \equiv (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$.

Substitusi $x = -3$ ke L .

$$\Leftrightarrow (-3 + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 0 + (y - 1)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = \pm 4$$

$$y - 1 = 4 \Leftrightarrow y = 5$$

Titik potongnya $(-3, 5)$

$$y - 1 = -4 \Leftrightarrow y = -3$$

Titik potongnya $(-3, -3)$

Persamaan garis singgung melalui (x_1, y_1) adalah $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$

Persamaan garis singgung melalui (-3,5).

$$\begin{aligned}(x+3)(-3+3) + (y-1)(5-1) &= 16 \\ \Leftrightarrow 0(x+3) + 4(y-1) &= 16 \\ \Leftrightarrow y-1 &= 4 \\ \Leftrightarrow y &= 5\end{aligned}$$

Persamaan garis singgung melalui (-3, -3)

$$\begin{aligned}(x+3)(-3+3) + (y-1)(-3-1) &= 16 \\ \Leftrightarrow 0(x+3) + -(4)(y-1) &= 16 \\ \Leftrightarrow y-1 &= -4 \\ \Leftrightarrow y &= -3\end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung $y = -3$ dan $y = 5$.

10. Jawaban :C

$f(x)$ dibagi $(x+1)$ bersisa -2.

$$f(x) = F_1(x)(x+1) + (-2) \Rightarrow f(-1) = -2$$

$f(x)$ dibagi $(x-3)$ bersisa 7.

$$f(x) = F_2(x)(x-3) + 7 \Rightarrow f(3) = 7$$

$g(x)$ dibagi $(x+1)$ bersisa 3.

$$g(x) = G_1(x)(x+1) + 3 \Rightarrow g(-1) = 3$$

$g(x)$ dibagi $(x-3)$ bersisa 2.

$$g(x) = G_2(x)(x-3) + 2 \Rightarrow g(3) = 2$$

Misal $h(x)$ dibagi $(x^2 - 2x - 3)$ bersisa $ax + b$.

$$h(x) = H(x)(x^2 - 2x - 3) + (ax + b)$$

$$\Leftrightarrow h(x) = H(x)(x+1)(x-3) + (ax + b)$$

$$h(-1) = f(-1) \cdot g(-1) = -a + b$$

$$\Leftrightarrow (-2) \cdot (3) = -a + b$$

$$\Leftrightarrow -a + b = -6 \quad \dots (1)$$

$$h(3) = f(3) \cdot g(3) = 3a + b$$

$$\Leftrightarrow 7 \cdot 2 = 3a + b$$

$$\Leftrightarrow 3a + b = 14 \quad \dots (2)$$

Eliminasi b dari (1) dan (2).

$$-a + b = -6$$

$$\underline{3a + b = 14 \quad -}$$

$$-4a = -20 \Leftrightarrow a = 5$$

Substitusi $a = 5$ ke $-a + b = -6$

$$\Leftrightarrow -5 + b = -6$$

$$\Leftrightarrow b = -1$$

Diperoleh $a = 5$ dan $b = -1$

Jadi, sisa pembagiannya $5x - 1$.

11. Jawaban : B

$$g(x+1) = 2x - 1 \Leftrightarrow g(x+1) = 2(x+1) - 3$$

Diperoleh $g(x) = 2x - 3$

$$(f \circ g)(x) = 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow f(g(x)) = 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow f(2x - 3) = 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow f(2x - 3) = (2x - 3) + 5$$

Diperoleh $f(x) = x + 5$

$f(0) = 0 + 5 = 5$. Jadi, nilai $f(0) = 5$.

12. Jawaban : C

Misalkan x = Banyak sapi yang dibeli
 y = Banyak kambing yang dibeli

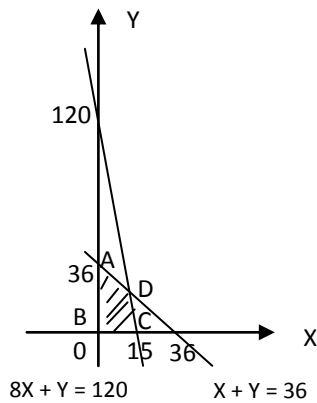
Ternak	Banyak	Harga (juta)	Keuntungan (juta)
Sapi	x	8	1
Kambing	y	1	0,5
Pembatas	36	120	

Diperoleh model Matematika:

$$\begin{cases} x + y \leq 36 \\ 8x + y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Maksimumkan fungsi objektif: $f(x,y) = x + 0,5y$

Daerah penyelesaian SPtLDV:



Titik D merupakan perpotongan garis $8x + y = 120$ dan $x + y = 36$.

Eliminasi y :

$$8x + y = 120$$

$$\underline{x + y = 36 \quad -}$$

$$7x = 84 \Leftrightarrow x = \frac{84}{7} = 12$$

Substitusi $x = 12$ ke $x + y = 36$.

$$\Leftrightarrow 12 + y = 36$$

$$\Leftrightarrow y = 36 - 12 = 24$$

Koordinat titik D(12, 24)

Uji titik pojok ke fungsi objektif $f(x,y) = x + 0,5y$

Titik Pojok	$f(x,y) = x + 0,5y$
A(0,36)	$0 + 0,5 \times 36 = 18$
B(0,0)	$0 + 0,5 \times 0 = 0$
C(15,0)	$15 + 0,5 \times 0 = 15$
D(12,24)	$12 + 0,5 \times 24 = 24$

Nilai maksimum $f(x,y)$ adalah 24 juta.

Jadi, keuntungan maksimum yang diperoleh pedagang tersebut Rp. 24.000.000,00.

13. Jawaban : C

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1-4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Diperoleh $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Dari kesamaan matriks diperoleh $a = 2$, $b = -3$, $c = -3$, dan $d = 4$.
 $a + b + c + d = 2 + (-3) + (-3) + 4 = 0$

14. Jawaban : E

Oleh karena vektor \vec{m} tegak lurus vektor \vec{n} , berlaku $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$.

$$\Leftrightarrow (-2a) \times (-a) + 4 \times (-3) + (-2) \times a = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 12 - 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 2)(a - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2 \text{ atau } a = 3$$

Oleh karena $a > 0$, maka $a = 3$.

$$2\vec{\ell} = 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{m} + \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \times 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2\vec{\ell} \cdot (\vec{m} + \vec{n}) = (-6) \times (-9) + 2 \times 1 + 4 \times 1 \\ = 54 + 2 + 4$$

$$= 60$$

15. Jawaban : B

Misal θ = sudut antara vektor \vec{u} dan \vec{v} .

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{(-1) \times 1 + 1 \times (-2) + 0 \times 2}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{-3}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

oleh karena $\cos \theta$ bertanda negatif, maka $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

Dengan demikian, $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Jadi, nilai $\sin \theta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

16. Jawaban : A

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Panjang proyeksi vektor \vec{AB} pada \vec{AC} = Proyeksi skalar vektor \vec{AB} pada \vec{AC}

$$\begin{aligned} &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AC}|} \\ &= \frac{5 \times 4 + (-5) \times (-3) + (-1) \times 5}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 5^2}} \\ &= \frac{20 + 15 - 5}{\sqrt{50}} \\ &= \frac{30}{5\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{30}{10}\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Jadi, panjang proyeksi vektor \vec{AB} pada \vec{AC} adalah $3\sqrt{2}$ satuan.

17. Jawaban : E

Koordinat bayangan titik T(-1,5) oleh transformasi yang diwakili matriks

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ adalah } (x', y').$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 15 \\ -2 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Diperoleh koordinat bayangan titik T adalah (-19,7).

Koordinat bayangan titik(19-7) oleh refleksi terhadap garis $x = 8$ adalah $(2(8) - 19, -7) = (-3, -7)$. Jadi bayangan titik T adalah $T'(-3, -7)$.

18. Jawaban E :

Misalkan $y = {}^3\log x$.

$${}^3\log^2 x + {}^3\log x^2 - 8 > 0$$

$$\Leftrightarrow {}^3\log^2 x + 2 {}^3\log x - 8 > 0$$

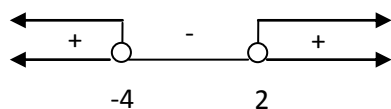
$$\Leftrightarrow y^2 + 2y - 8 > 0$$

$$\Leftrightarrow (y + 4)(y - 2) > 0$$

Pembuat nol :

$$y + 4 = 0 \text{ atau } y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -4 \text{ atau } y = 2$$



$$\Leftrightarrow y < -4 \text{ atau } y > 2$$

$$\Leftrightarrow {}^3\log x < -4 \text{ atau } {}^3\log x > 2$$

$$\Leftrightarrow x < 3^{-4} \text{ atau } x > 3^2$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{81} \text{ atau } x > 9$$

Syarat numerous: $x > 0$

Jadi, penyelesaiannya $0 < x < \frac{1}{81}$ atau $x > 9$.

19. Jawab : C

Grafik fungsi melalui titik (-1,0), (0,1), (1,3), dan (2,7).

$$f(x) = 2^{x+a} + b$$

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow 2^{1+a} + b = 3$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{2^{0+a} + b = 1}{2^{1+a} - 2^{0+a} = 2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^a - 2^a = 2$$

$$\Leftrightarrow 2^a = 2$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

$$2^{1+a} + b = 3 \Leftrightarrow 2^2 + b = 3$$

$$\Leftrightarrow 4 + b = 3$$

$$\Leftrightarrow b = -1$$

Jadi, nilai $a = 1$ dan $b = -1$

20. Jawaban : E

Diantara dua bilangan disisipkan 11 bilangan sehingga ada 13 bilangan. Bilangan-bilangan tersebut membentuk barisan aritmetika dengan $U_1 = 12$ dan $U_{13} = 108$.

$$a = U_1 = 12$$

$$U_{13} = 108 \Leftrightarrow 12 + 2b = 108$$

$$\Leftrightarrow 12b = 96$$

$$\Leftrightarrow b = 8$$

Sebelas bilangan yang disisipkan adalah 20, 28, 36, ..., 100.

$$\text{Jumlah sebelas bilangan yang disisipkan} = 20 + 28 + 36 + \dots + 100$$

$$= \frac{11}{2}(20 + 100)$$

$$= \frac{11}{2}(120) = 660$$

21. Jawaban : D

Banyak batu bata pada setiap lapis membentuk barisan bilangan 12, 15, 18, ...

Barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmetika dengan $a = 12$ dan $b = 3$.

$$S_{18} = \frac{18}{2}(2a + (18 - 1)b)$$

$$= 9(2(12) + 17(3))$$

$$= 9(24 + 51)$$

$$= 9(75) = 675$$

Jadi, banyak batu bata adalah 675 buah.

22. Jawaban : A

Pantulan bola membentuk barisan geometri dengan $a = 250$ dan $r = \frac{3}{5}$.

Tinggi maksimum bola setelah pantulan keempat :

$$U_5 = ar^4 = 250 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 = 250 \times \frac{81}{625}$$

$$= 2 \times \frac{81}{5} = \frac{162}{5} = 32,4$$

Jadi, tinggi maksimum bola setelah pantulan keempat 32,4 cm.

23. Jawaban : C

Segitiga ABC siku-siku sama kaki sehingga

$$\angle BAB_1 = \angle B_1BB_2 = \angle B_2B_1B_3 = \dots = 45^\circ$$

$$BB_1 = AB \sin \angle BAB_1 = 8 \times \sin 45^\circ = 8 \sin 45^\circ$$

$$B_1B_2 = BB_1 \sin \angle B_1BB_2 \\ = 8 \sin 45^\circ \times \sin 45^\circ = 8(\sin 45^\circ)^2$$

$$B_2B_3 = B_1B_2 \sin \angle B_2B_1B_3 \\ = 8(\sin 45^\circ)^2 \times \sin 45^\circ = 8(\sin 45^\circ)^3$$

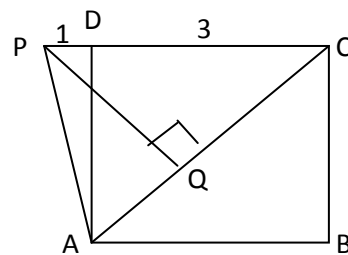
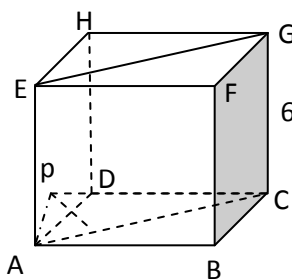
Jumlah panjang sisi miring $AB + BB_1 + B_1B_2 + B_2B_3 + \dots$ membentuk deret geometri

dengan $a = 8$ dan $r = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, sehingga :

$$\begin{aligned}
S_{\infty} &= \frac{a}{1-r} = \frac{8}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \frac{2}{2} = \frac{16}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\
&= \frac{16(2+\sqrt{2})}{4-2} \\
&= \frac{16(2+\sqrt{2})}{2} \\
&= 8(2+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Jadi, $AB + BB_1 + B_1 + B_2 + B_2 B_3 + \dots = 8(2 + \sqrt{2})$ cm.

24. Jawaban : B



Jarak antara titik P ke bidang ACGE sama dengan jarak antara titik P ke garis AC, yaitu panjang PQ. AC merupakan diagonal sisi, maka panjang $AC = 6\sqrt{2}$ cm.

$$DP = \frac{1}{3} CD = \frac{1}{3} \times 6 = 2 \text{ cm.}$$

$$CP = CD + DP + 6 + 2 = 8 \text{ cm.}$$

Luas segitiga ACP :

$$\frac{1}{2} \times AC \times PQ = \frac{1}{2} \times CP \times AD$$

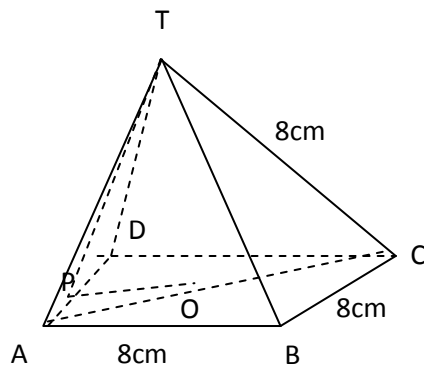
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times PQ = \frac{1}{2} \times 8 \times 6$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2} PQ = 24$$

$$\Leftrightarrow PQ = \frac{24}{3\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

Jadi, jarak dari titik P ke ACGE adalah $4\sqrt{2}$ cm.

25. Jawaban : E



Bidang TAD dan bidang ABCD berpotongan pada garis AD. P titik tengah AD, maka TP dan OP tegak lurus AD. Sudut antara bidang TAD dan bidang alas ABCD adalah $TPO = \alpha$.

Segitiga ABC siku-siku di B, maka :

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{64 + 64} \\ &= \sqrt{128} \\ &= 8\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AO &= \frac{1}{2} AC \\ &= \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

Segitiga AOT siku-siku di O, maka :

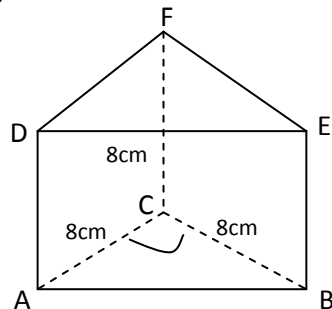
$$\begin{aligned} OT &= \sqrt{AT^2 - AO^2} \\ &= \sqrt{64 - 32} \\ &= \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

$$PO = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ cm}$$

Segitiga POT siku-siku di O, berarti: $\tan \alpha = \frac{OT}{PO} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$

Jadi, tangen sudut antara bidang TAD dan bidang alas ABCD adalah $\sqrt{2}$.

26. Jawaban : D



Perhatikan $\triangle ACB$. Pada $\triangle ACB$ berlaku aturan kosinus sebagai berikut.

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2(AC)(BC) \cos \angle ACB \\ &= 8^2 + 8^2 - 2(8)(8) \cos 120^\circ \\ &= 64 + 64 + 64 \\ &= 192 \end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$$

Luas permukaan prisma = 2 luas alas + keliling alas x tinggi

$$\begin{aligned} &= 2\left(\frac{1}{2} \times AC \times BC \times \sin 120^\circ\right) + (AB + BC + AC) \times CF \\ &= 2\left(\frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \frac{1}{2} \sqrt{3}\right) + (8\sqrt{3} + 8 + 8) \times 8 \\ &= 32\sqrt{3} + (16 + 8\sqrt{3}) \times 8 \\ &= 32\sqrt{3} + 128 + 64\sqrt{3} \\ &= 128 + 96\sqrt{3} \end{aligned}$$

Jadi, luas permukaan prisma $128 + 96\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

27. Jawaban : D

$$\begin{aligned} 2 \cos 2x - \cos^2 x + \sin^2 x + 1 &= 0 \\ 2(2 \cos^2 x - 1) - \cos^2 x + \sin^2 x + 1 &= 0 \\ 4 \cos^2 x - 2 - \cos^2 x + \sin^2 x + 1 &= 0 \\ 3 \cos^2 x + \sin^2 x - 1 &= 0 \\ 3(1 - \sin^2 x) + \sin^2 x - 1 &= 0 \\ 3 - 3 \sin^2 x + \sin^2 x - 1 &= 0 \\ 2 - 2 \sin^2 x &= 0 \\ 2 \sin^2 x &= 2 \\ \sin^2 x &= 1 \\ \sin x &= \pm 1 \end{aligned}$$

$$\sin x = 1 = \sin \frac{\pi}{2}$$

Penyelesaiannya:

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

Untuk $k = 0$, maka $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\sin x = -1 = \sin \frac{3\pi}{2}$$

Penyelesaiannya:

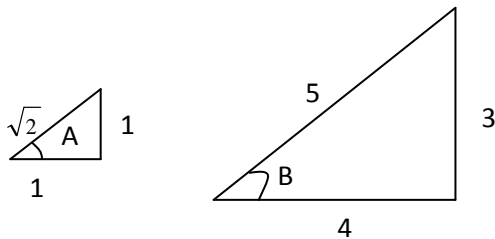
$$x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

Untuk $k = 0$, maka $x = \frac{3\pi}{2}$

Jadi, himpunan penyelesaiannya $\left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$

28. Jawaban : A

$$\begin{aligned}
& \cos 75^{\circ} + \sin 105^{\circ} \\
&= \cos (45^{\circ} + 30^{\circ}) + \sin (60^{\circ} + 45^{\circ}) \\
&= (\cos 45^{\circ} \cos 30^{\circ} - \sin 45^{\circ} \sin 30^{\circ}) + (\sin 60^{\circ} \cos 45^{\circ} + \cos 60^{\circ} \sin 45^{\circ}) \\
&= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{6} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{6}
\end{aligned}$$

29. Jawaban : E

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin B = \frac{3}{5}$$

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos B = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\sin(A - B)}{\cos(A + B)} = \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3}{5}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)}$$

$$= \frac{\frac{4}{5\sqrt{2}} - \frac{3}{5\sqrt{2}}}{\frac{4}{5\sqrt{2}} - \frac{3}{5\sqrt{2}}} = 1$$

30. Jawaban : A

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3 - \sqrt{4x^2 - 2x + 5}) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} ((2x + 3) - \sqrt{4x^2 - 2x + 5}) \times \frac{(2x + 3) + \sqrt{4x^2 - 2x + 5}}{(2x + 3) + \sqrt{4x^2 - 2x + 5}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 3)^2 - (4x^2 - 2x + 5)}{(2x + 3)^2 + (4x^2 - 2x + 5)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2 + 12x + 9) - (4x^2 - 2x + 5)}{(2x + 3) + \sqrt{4x^2 - 2x + 5}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x + 4}{(2x + 3) + \sqrt{4x^2 - 2x + 5}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14 + \frac{4}{x}}{(2 + \frac{3}{x}) + \sqrt{4 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}} \\
&= \frac{14 + 0}{(2 + 0) + \sqrt{4 - 0 + 0}} \\
&= \frac{14}{2 + 2} = \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

31. Jawaban : C

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 + 4x + 4) \cos(x + 2)}{\cos(3x + 6) - \cos(x + 2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x + 2) \cos(x + 2)}{-2 \sin(2x + 4) \sin(x + 2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x + 2)}{-2 \sin 2(x + 2) \tan(x + 2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)}{-2 \sin 2(x + 2)} \cdot \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)}{\tan(x + 2)} \\
&= \frac{1}{-2 \cdot 2} \cdot 1 = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

32. Jawaban : B

Waktu pembangunan = x hari

Biaya per hari = $(150 - \frac{1000}{x} - 3x)$ juta

Biaya keseluruhan = B

$B = (150 - \frac{1000}{x} - 3x)(x)$ juta

= $150x - 1.000 - 3x^2$ juta

= $-3x^2 + 150x - 1.000$ juta

Biaya minimum tercapai pada saat $\frac{dB}{dx} = 0$

$$-6x + 150 = 0$$

$$6x = 150$$

$$x = 25$$

Biaya keseluruhan:

$$B = -3x^2 + 150x - 1.000 \text{ juta}$$

$$= -3(25)^2 + 150(25) - 1.000 \text{ juta}$$

$$= -1.875 + 3.750 - 1.000 \text{ juta}$$

$$= 875 \text{ juta}$$

Jadi, biaya minimumnya Rp. 875.000.000,00.

33. Jawaban : A

Integral parsial

Fungsi $4x^2 \cos^2 x$ dapat dipecah menjadi fungsi $2x^2$ dan $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$.

Fungsi $2x^2$ diturunkan sampai diperoleh nilai nol, sedangkan $(1 + \cos 2x)$ diintegrasikan.

Diturunkan

Diintegrasikan

$2x^2$	\swarrow + \searrow	$1 + \cos 2x$
$4x$	\swarrow - \searrow	$x + \frac{1}{2} \sin 2x$
4	\swarrow + \searrow	$\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} \cos 2x$
0		$\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{8} \sin 2x$

$$\int 4x^2 \cos^2 x \, dx$$

$$= 2x^2 \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) - 4x \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} \cos 2x \right) + 4 \left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{8} \sin 2x \right) + C$$

$$= 2x^3 + x^2 \sin 2x - 2x^3 + x \cos 2x + \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$= \frac{2}{3} x^3 + x \cos 2x + \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \sin 2x + C$$

34. Jawaban :D

Integral parsial

Fungsi $\frac{x}{2\sqrt{(x-1)^3}}$ dapat dipecah menjadi fungsi $\frac{x}{2}$ dan $\frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}} = (x-1)^{-\frac{3}{2}}$. Fungsi $\frac{x}{2}$

diturunkan sampai diperoleh nilai nol, sedangkan $(x-1)^{-\frac{3}{2}}$ diintegrasikan.

Diturunkan

Diintegalkan

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} + \\ - \\ - \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} (x-1)^{-\frac{3}{2}} \\ -2(x-1)^{-\frac{1}{2}} \\ -4(x-1)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

$$\int_2^5 \frac{x}{2\sqrt{(x-1)^3}} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x \cdot (-2)(x-1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 4(x-1)^{\frac{1}{2}} \right]_2^5$$

$$= \left[-x(x-1)^{-\frac{1}{2}} + 2(x-1)^{\frac{1}{2}} \right]_2^5$$

$$= \left[-\frac{x}{\sqrt{x-1}} + 2\sqrt{x-1} \right]_2^5$$

$$= \left(-\frac{5}{\sqrt{5-1}} + 2\sqrt{5-1} \right) - \left(-\frac{2}{\sqrt{2-1}} + 2\sqrt{2-1} \right)$$

$$= \left(\frac{-5}{2} + 2 \cdot 2 \right) - (-2 + 2)$$

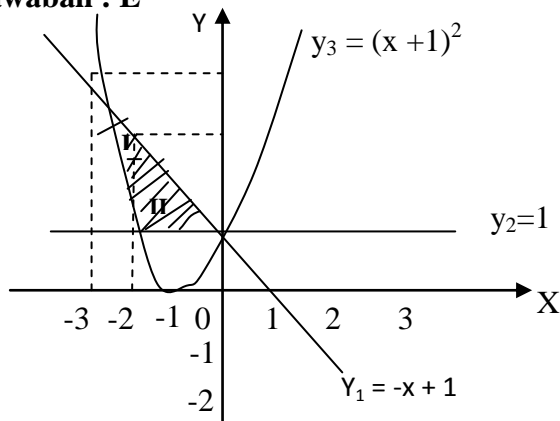
$$= -2\frac{1}{2} + 4 - 0$$

$$= 1\frac{1}{2}$$

35. Jawaban : B

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \cos 2x \sin^2 x \, dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x \cdot 2 \sin^2 x \, dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x (1 - \cos 2x) \, dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos 2x - \cos^2 2x) \, dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\cos 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \right) \, dx \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\cos 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \right) \, dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \sin 4x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
 &= \left(\frac{1}{2} \sin 2\pi - \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{8} \sin 4\pi \right) - \left(\frac{1}{2} \sin(-\pi) + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{8} \sin(-2\pi) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{8} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{8} \cdot 0 \\
 &= -\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi \\
 &= -\frac{3}{4}\pi
 \end{aligned}$$

36. Jawaban : E

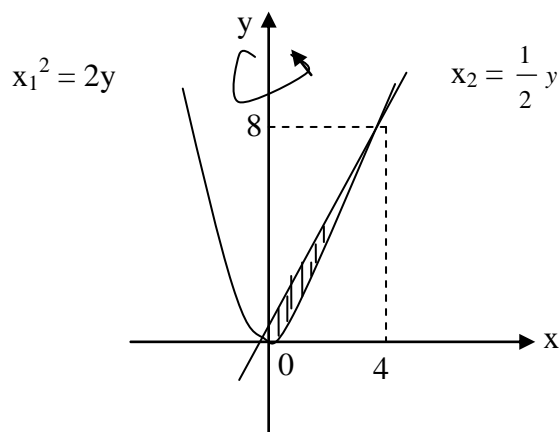


Daerah yang diarsir terbagi menjadi daerah I dan II. Daerah I dibatasi kurva $y = (x + 1)^2$, garis $y = -1 + x$, dan $x = -2$. Daerah II dibatasi garis $y = -x + 1$, $y = 1$, dan $x = -2$.

$$L = L_I + L_{II}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-3}^{-2} (y_1 - y_3) dx + \int_{-2}^0 (y_1 - y_2) dx \\
 &= \int_{-3}^{-2} (-x + 1 - (x + 1)^2) dx + \int_{-2}^0 (-x + 1 - 1) dx \\
 &= \int_{-3}^{-2} -x + 1 - (x^2 + 2x + 1) dx + \int_{-2}^0 (-x) dx \\
 &= \left(\int_{-3}^{-2} -x^2 - 3x dx \right) + \int_{-2}^0 (-x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-3}^{-2} - \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^0 \\
 &= -\frac{1}{3}((-2)^3 - (-3)^3) - \frac{3}{2}((-2)^2 - (-3)^2) - \frac{1}{2}(0^2 - (-2)^2) \\
 &= -\frac{1}{3}(-8 + 27) - \frac{3}{2}(4 - 9) - \frac{1}{2} \cdot (-4) \\
 &= -\frac{1}{3} \cdot 19 - \frac{3}{2}(-5) + 2 \\
 &= -\frac{19}{3} + \frac{15}{2} + 2 \\
 &= 3\frac{1}{6} \text{ satuan luas}
 \end{aligned}$$

37. Jawaban : C



$$\begin{aligned}
&= \pi \int_0^8 (x_1^2 - x_2^2) dy \\
&= \pi \int_0^8 \left(2y - \left(\frac{1}{2}y\right)^2\right) dy \\
&= \pi \int_0^8 \left(2y - \frac{1}{4}y^2\right) dy \\
&= \pi \left[y^2 - \frac{1}{12}y^3 \right]_0^8 \\
&= \pi \left((8^2 - 0^2) - \frac{1}{12}(8^3 - 0^3) \right) \\
&= \pi \left(8^2 - \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot 8^2 \right) \\
&= 8^2 \pi \left(1 - \frac{8}{12} \right) \\
V &= 64 \pi \cdot \frac{1}{3} \\
&= 21 \frac{1}{3} \pi \text{ satuan volume}
\end{aligned}$$

38. Jawaban : D

2 siswa putra dan 1 siswa putri sudah dipilih maka siswa yang belum terpilih 3 siswa putra dari 6 siswa putra dan 2 siswa putri dari 9 siswa putri.

$$\begin{aligned}
\text{Banyak cara memilih.} &= {}_6C_3 \cdot {}_9C_2 \\
&= 20 \cdot 36 \\
&= 720
\end{aligned}$$

39. Jawaban : B

Banyak data = N = 39

$$\begin{aligned}
\text{Median} &= \text{nilai data ke-} \frac{1}{2}(39 + 1) \\
&= \text{nilai data ke-20}
\end{aligned}$$

Median pada interval kelas yang mempunyai tepi bawah 149,5 dan tepi atas 154,5.

$$L_2 = 149,5$$

$$\Sigma f_2 = 15$$

$$f_2 = 10$$

$$c = 154,5 - 149,5 = 5$$

$$\begin{aligned}
\text{Median} &= L_2 + \left(\frac{\frac{1}{2}N - \Sigma f_2}{f_2} \right) \times c \\
&= 149,5 + \left(\frac{\frac{1}{2}N - \Sigma f_2}{10} \right) \times c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 149,5 + \frac{4,5}{2} \\ &= 149,5 + 2,25 \\ &= 151,75 \end{aligned}$$

40. Jawaban : A

Banyak soal yang dapat dipilih = $14 - 3 = 11$.

Banyak soal yang harus dipilih = $7 - 3 = 4$.

Banyak soal bernomor ganjil yang dapat dipilih = 5.

Peluang soal bernomor ganjil dipilih siswa

$$\begin{aligned} &= \frac{{}_5C_4}{{}_{11}C_4} \\ &= \frac{5}{330} \\ &= \frac{1}{66} \end{aligned}$$